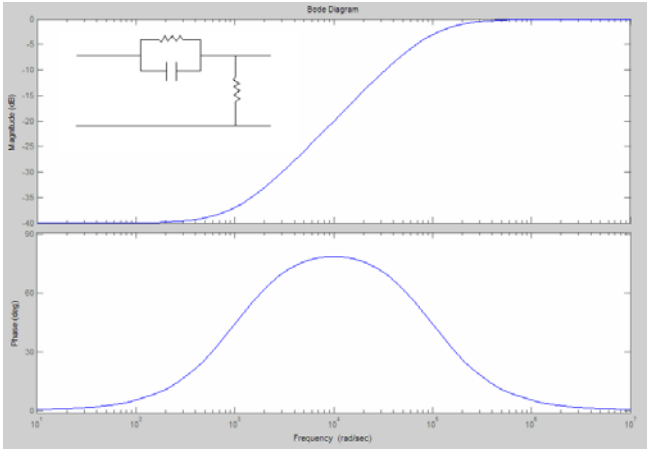
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ Σ.Α.Ε.
Διάγραμμα BODE



ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΓΕΝΙΚΑ :

Η μέθοδος της ανταπόκρισης συχνότητας είναι μία από τις μεθόδους που εφαρμόζονται για την ανάλυση και σύνθεση των συστημάτων ελέγχου. Σαν ανταπόκριση συχνότητας ενός συστήματος ορίζουμε την ανταπόκριση σταθερής κατάστασης σε ημιτονοειδές σήμα εισόδου. Σε αυτή την περίπτωση η έξοδος του γραμμικού συστήματος καθώς και τα σήματα στα διάφορα σημεία του συστήματος στην σταθερή κατάσταση θα είναι ημιτονοειδή και θα διαφέρουν από την είσοδο μόνο κατά πλάτος και φάση.

Τα δύο βασικά πλεονεκτήματα της μεθόδου ανταπόκρισης συχνότητας είναι :

1. Ο πειραματικός προσδιορισμός της ανταπόκρισης συχνότητας είναι απλή υπόθεση αφού είναι εύκολο να βρούμε σήματα ελέγχου για διάφορες συχνότητες και εύρη. Διαθέτουμε συνεπώς ένα απλό και αξιόπιστο πειραματικό τρόπο για να αναλύσουμε το σύστημα. Ακόμα σε πολλές περιπτώσεις, είναι αδύνατον να βρούμε την άγνωστη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος ή κάποιου εξαρτήματος αυτού.
2. Η συνάρτηση μεταφοράς που δίνει την ανταπόκριση σταθερής κατάστασης ενός συστήματος, μπορεί να βρεθεί αν αντικαταστήσουμε το **s** με **jω** στη συνάρτηση μεταφοράς. Τότε η Σ.Μ. (συνάρτηση μεταφοράς) είναι σύνθετη συνάρτηση με μέγεθος (μέτρο) και φάση που είναι εύκολο να παρασταθεί με γραφικές καμπύλες οι οποίες είναι πολύτιμες για τη σχεδίαση των συστημάτων ελέγχου.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ BODE :

Όταν η συχνότητα ενός σήματος εισόδου ενός Σ.Α.Ε. μεταβάλλεται, τότε μεταβάλλεται και η έξοδος αυτού κατά εύρος και κατά φάση. Έτσι λοιπόν προκύπτουν δύο καμπύλες που ορίζουν την απόκριση συχνότητας (διάγραμμα BODE). Αντίθετα το διάγραμμα NYQUIST έχει μία καμπύλη. Τα διαγράμματα BODE και NYQUIST μας δίνουν τις ίδιες πληροφορίες για τη συ-

νάρτηση μεταφοράς H(jω), για **την ευστάθεια του συστήματος**, **για τα περιθώρια φάσης και ενίσχυσης**.

Η καμπύλη του πλάτους M της Σ.Μ. σε db δίνεται από τον τύπο :

$$A = 20\log M = 20\log |H(j\omega)|$$

και η καμπύλη της φάσεως από τον τύπο :

$$\varphi = \angle H(j\omega)$$

Το πλεονέκτημα των διαγραμμάτων BODE είναι ότι κατασκευάζονται πολύ πιο εύκολα από τα διαγράμματα NYQUIST.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Συνήθως η συνάρτηση μεταφοράς H (jω) περιέχει παράγοντες της μορφής K, $(j\omega)^{\pm k}$, $(j\omega+1)^{\pm k}$ και $[(j\omega)^2+2\zeta\omega_o(j\omega)+\omega_o^2]^{\pm k}$.

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(j\omega)= \frac{K(j\omega T_1'+1)\,(j\omega T_2'+1)}{(j\omega)^2\,(j\omega T_1+1)\;[(j\omega)^2+2\zeta\omega_o(j\omega)+\omega_o^2]} \qquad (1)$$

Τα διαγράμματα BODE της H(jω) είναι οι καμπύλες των A και φ (Amplitude, πλάτος), όπου

$$A = 20\log M = 20\log |H(j\omega)|$$

$$= 20\log \frac{|K|\;|j\omega T_1'+1|\;|j\omega T_2'+1|}{|j\omega^2|\;|j\omega T_1+1|\;|(j\omega)^2+2\zeta\omega_o(j\omega)+\omega_o^2|}$$

$$=20\log |K| + 20\log |j\omega T_1'+1| + 20\log |j\omega T_2'+1| - 20\log |j\omega^2| - 20\log |j\omega\, T_1+1| - 20\log |(j\omega)^2+2\zeta\omega_o(j\omega)+\omega_o^2| \qquad (2)$$

και

$$\varphi = \angle H(j\omega)$$

$$= \angle K + \angle(j\omega T_1'+1) + \angle(j\omega T_2'+1) - \angle(j\omega)^2 - \angle(j\omega T_1+1) - \angle[(j\omega)^2+2\zeta\omega_o(j\omega)+\omega_o^2] \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) μπορούμε εύκολα να χαράξουμε τις καμπύλες A και φ αφού η μεν καμπύλη του A είναι το άθροισμα των καμπυλών των όρων $20\log |K|$, $20\log |j\omega T_1'+1|$ κ.λ.π. , η δε καμπύλη της φ είναι το άθροισμα των γωνιών των όρων $\angle K$, $\angle(j\omega T_1'+1)$ κ.λ.π.

Στις παρακάτω παραγράφους βλέπουμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε τις καμπύλες αυτές.

1. **Σταθερός όρος K**

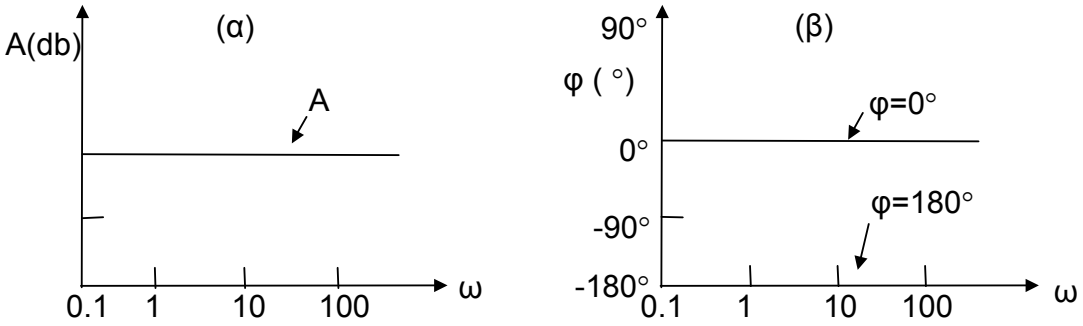
Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε :

$$A = 20\log |K| \qquad (4\alpha)$$

$\varphi = 0^\circ$ όταν $K>0$ (4β)

$\varphi = 180^\circ$ όταν $K<0$

Η γραφική παράσταση των A και φ δίνεται στο παρακάτω σχήμα :



2. **<u>Πόλοι ή μηδενικά στην αρχή των αξόνων :</u> $(j\omega)^{\pm k}$**

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε :

$$A = 20\log |(j\omega)^{\pm k}| = \pm 20k\log \omega \qquad (5\alpha)$$

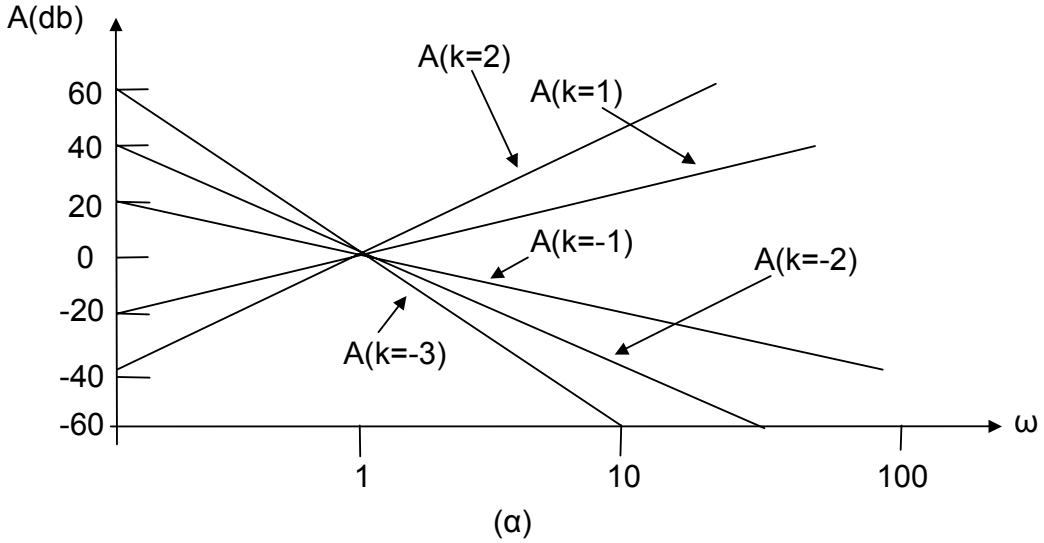
$$\varphi = \angle (j\omega)^{\pm k} = \pm 90°k \qquad (5\beta)$$

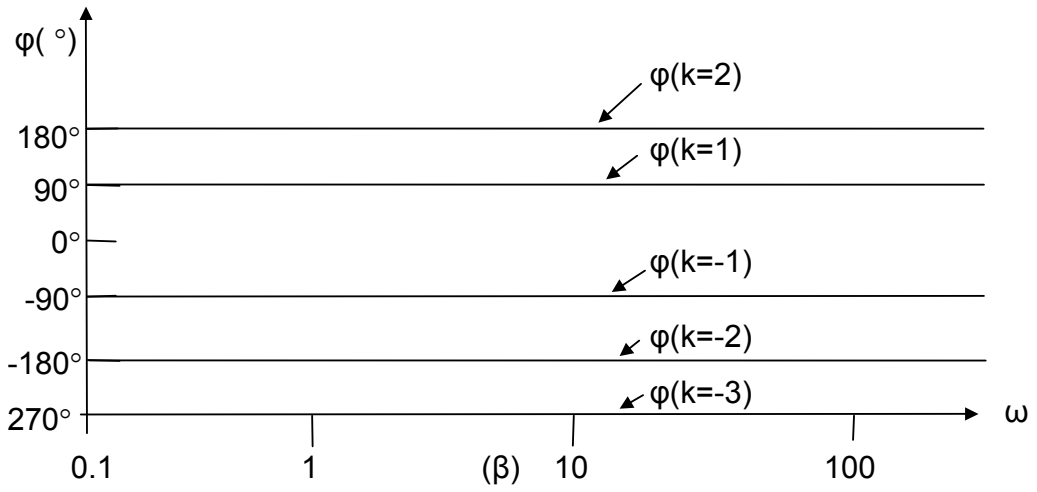
Σε ημιλογαριθμικό χαρτί παριστάνουμε την (5α) που είναι μια σειρά από ευθείες γραμμές. Όλες αυτές οι γραμμές περνούν από το σημείο A = 0 και ω = 1 και έχουν κλίση ± 20kdb η οποία ονομάζεται «20k db ανά δεκάδα», που σημαίνει ότι για αύξηση της συχνότητας από ω στο 10ω , το πλάτος μεταβάλλεται κατά ±20k db. Πράγματι από τη σχέση (5) θα έχουμε

$$\Delta A = A(10\omega)-A(\omega) = 20\log |(j10\omega)^{\pm k}| - 20\log |(j\omega)^{\pm k}|$$

$$= \pm 20k\log \omega \pm 20k\log 10 - (\pm 20k\log \omega) = \pm 20k$$

Η γραφική παράσταση των A και φ δίνεται στο παρακάτω σχήμα :





3. **<u>Πόλοι ή μηδενικά της μορφής :</u>** $(j\omega T+1)^{\pm k}$

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε :

$$A = \pm 20\log |(j\omega T+1)^{\pm k}| = \pm 20k\log |j\omega T+1| = \pm 20k\log \sqrt{\omega^2T^2+1} \quad (6\alpha)$$

$$\varphi = \angle (j\omega+1)^{\pm k} = \pm k\varepsilon\varphi^{-1}\, \omega T \quad (6\beta)$$

Σε ημιλογαριθμικό χαρτί σχεδιάζουμε την (6α) που είναι μια σειρά από καμπύλες για τις οποίες ισχύουν τα εξής :

α. Όταν ω<<1/T, η (6α) δίνει

$$A = \pm 20k\log \sqrt{\omega^2T^2+1} = 20k\log 1 = 0 \quad (7\alpha)$$

β. Όταν ω=1/T, η (6α) δίνει

$$A = \pm 20k\log \sqrt{2} = \pm 20k\ 0.15 = \pm 3k \quad (7\beta)$$

γ. Όταν ω>>1/T, η (6α) δίνει

$$A = \pm 20k\log \omega T \quad (7\gamma)$$

Επομένως η καμπύλη της (6α) αποτελείται, κατά προσέγγιση, από δύο ασύμπτωτες ημιευθείες. Η μία ημιευθεία συμπίπτει με τον άξονα των 0 db και ισχύει για $0 \le \omega \le 1/T$. Η άλλη ημιευθεία τέμνει τον άξονα ωT στο σημείο ωT=1, έχει κλίση ±20k db και ισχύει για $1/T \le \omega \le +\infty$. Στο σημείο ω=1/T, η καμπύλη Α σύμφωνα με τη σχέση (7β) είναι ±3k db.

Η καμπύλη της γωνίας φ, που δίνεται από τη σχέση (6β), κατασκευάζεται δίνοντας διάφορες τιμές στο ω και υπολογίζοντας τις αντίστοιχες τιμές της γωνίας φ. Μερικές χαρακτηριστικές της φ είναι οι παρακάτω :

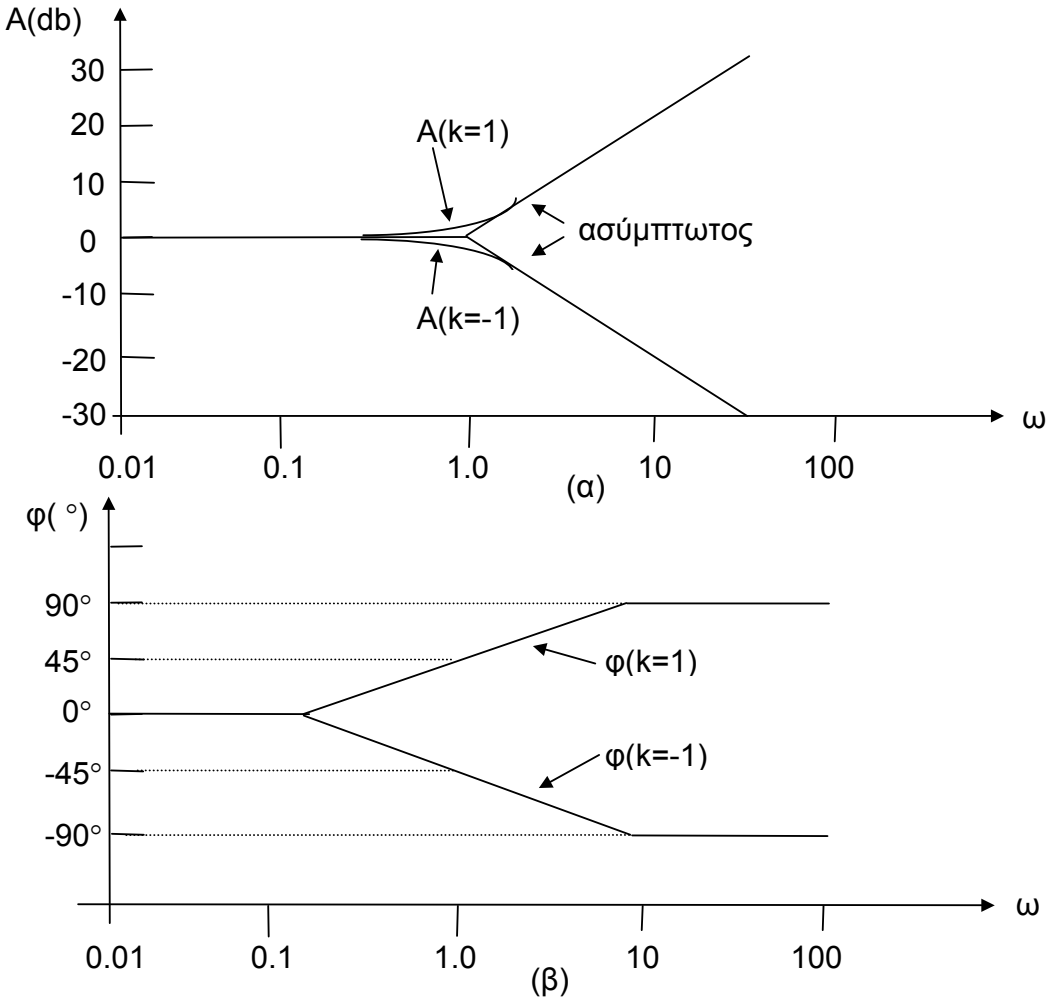
α) όταν ω=0, τότε φ=0°

β) όταν ωT=1, τότε φ= ±45°k

γ) όταν $\omega \longrightarrow \infty$, τότε φ= ±90° k

επομένως, η καμπύλη της φ αρχίζει από το 0, περνά από το σημείο ±45°k και καταλήγει ασυμπτωματικά στην ευθεία ±90°k.

Η γραφική παράσταση των A και φ όταν k= ±1 δίνεται στο παρακάτω σχήμα :



4. **<u>(Ακαδημαϊκά) Παράγοντες της μορφής :</u>** $[\omega_o^{-2}(j\omega)^2+2\zeta\omega_o^{-1}(j\omega)+1]^{\pm k}$

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε :

$$A = \pm 20k\log\sqrt{(1-u^2)^2+4\zeta^2u^2} \qquad (8\alpha)$$

$$\varphi = \pm k\varepsilon\varphi^{-1}\frac{2\zeta u}{1-u^2} \qquad (8\beta)$$

όπου $u=\omega/\omega_o$. Η καμπύλη της (8α) κατασκευάζεται προσεγγιστικά με βάση τις παρακάτω παρατηρήσεις :

α. Όταν $u<<1$, η (8α) δίνει

$$A = \pm 20k\log 1 = 0 \qquad (9\alpha)$$

β. Όταν $u>>1$, η (8α) δίνει

$$A = 40k\log u \qquad (9\beta)$$

γ. Όταν $\zeta=1$, η (8α) δίνει

$$A = \pm 20k\log|1+u^2| \qquad (9\gamma)$$

δ. Όταν ζ=1, η (8α) δίνει

$$A = \pm 20k\log|1-u^2| \qquad (9\delta)$$

Επομένως η καμπύλη της (8α) αποτελείται από δύο ασύμπτωτες ημιευθείες κατά προσέγγιση. Η μία βρίσκεται στα 0 db και η άλλη έχει κλίση ±k και τέμνει τον άξονα u στο σημείο u=1. Στην περιοχή του σημείου τομής των δύο ασυμπτώτων η μορφή της καμπύλης Α επηρεάζεται αποφασιστικά από τη σταθερά αποσβέσεως ζ.

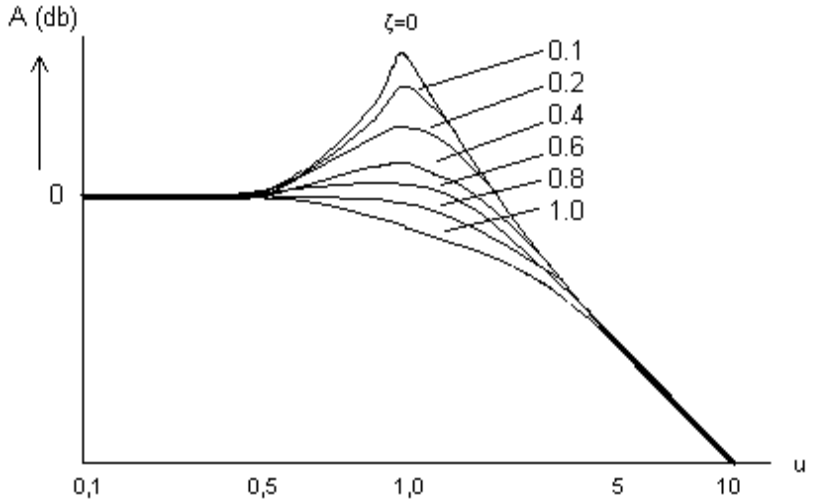
Η γραφική παράσταση της γωνίας φ (8β), παρουσιάζει τα εξής χαρακτηριστικά :

α) όταν u=0, τότε φ=0°

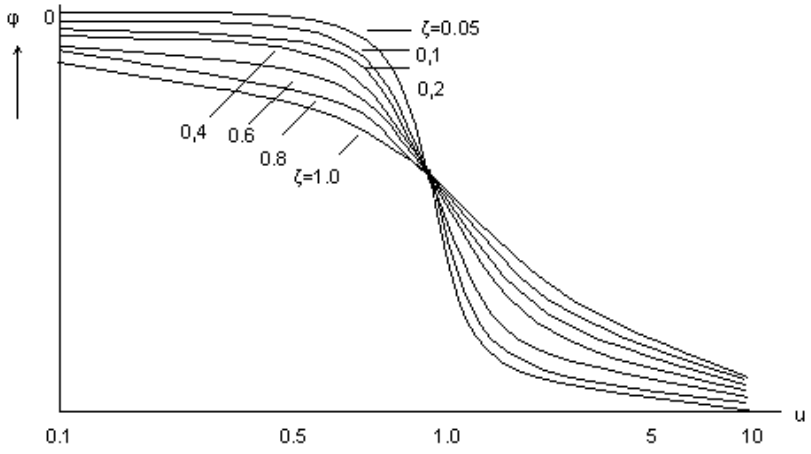
β) όταν u=1, τότε φ= ±90°k

γ) όταν u $\longrightarrow \infty$, τότε φ= ±180° k

Η γραφική παράσταση των Α και φ όταν k=-1 (που είναι και η πιο συνηθισμένη ρίπτωση), δίνεται στα παρακάτω σχήματα :



(α)



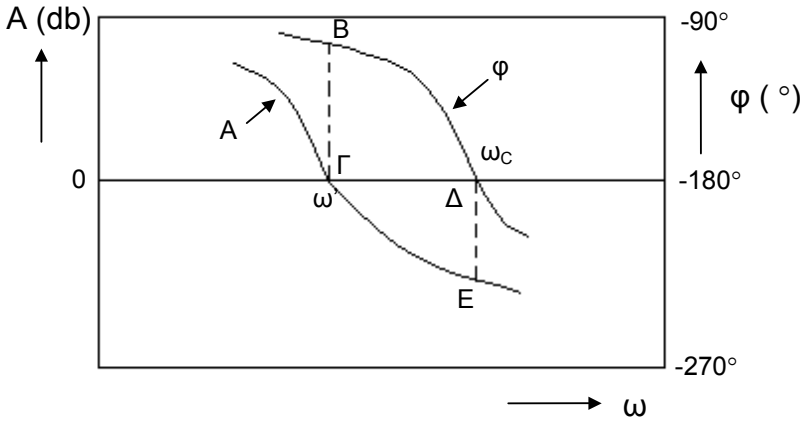
(β)

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑΣ BODE

Από το διάγραμμα BODE της Σ.Μ. του ανοιχτού βρόγχου μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τη σταθερότητα του συστήματος. Το κριτήριο σταθερότητας BODE έχει ως εξής :

Ένα σύστημα είναι ασταθές αν η ενίσχυσή του είναι μεγαλύτερη από μονάδα (ή 0 db) σε συχνότητα για την οποία η φάση είναι 180°. Από το διάγραμμα BODE προκύπτουν δύο μεγέθη τα οποία δείχνουν τη σχετική σταθερότητα του συστήματος.

Τα μεγέθη αυτά είναι το **περιθώριο ενίσχυσης Kg** και το **περιθώριο φάσης φ_p** και φαίνονται στο παρακάτω σχήμα :



Όταν ω=ω' τότε |G(jω')F(jω')|=1 και επομένως A=0 και όταν ω=ω_C, τότε φ=-180°. Επομένως, το μεν K_g είναι το κατακόρυφο τμήμα της ευθείας γραμμής που συνδέει το σημείο ω_C με την καμπύλη A, το δε φ_p είναι το κατακόρυφο τμήμα της ευθείας γραμμής που συνδέει το σημείο ω' με την καμπύλη φ. Συγκεκριμένα, για το σύστημα του παραπάνω σχήματος θα είναι :

Εδώ (π.χ.) : $K_g = -20\log |G(j\,\omega_C)F(j\,\omega_C)| = \Delta E$ db

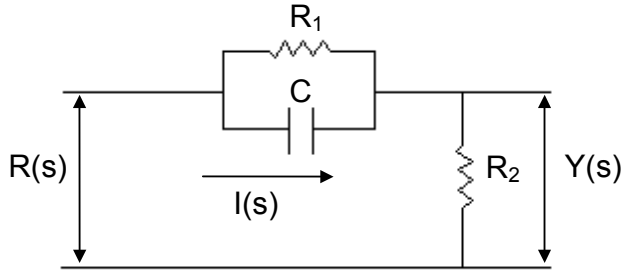
$\varphi_p = 180° + \angle\, G(j\,\omega')F(j\,\omega') = 180° + [-180° + (\Gamma B)°\,] = (\Gamma B)°$

Επειδή για το σύστημα του προηγούμενου σχήματος τα Kg και φ_p είναι θετικά, το σύστημα αυτό είναι ευσταθές.

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΕΡΔΟΥΣ ΚΑΙ ΦΑΣΗΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΠΟΡΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Κύκλωμα προπορείας

Το πιο συνηθισμένο απλό κύκλωμα προπορείας είναι αυτό του πιο κάτω σχήματος. Λέγεται προπορείας γιατί όταν διεγείρεται με ημιτονική τάση, η τάση εξόδου προηγείται της τάσης εισόδου οπότε το κύκλωμα εισάγει «θετική» φάση.



Συνάρτηση μεταφοράς :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{I(s)R_2}{I(s)[(R_1 \bullet 1/Cs \,/\, R_1+1/Cs)+R_2]}$$

$$G(s)=\frac{R_2}{R_1/(R_1Cs+1)+R_2}=\frac{R_2}{\frac{R_1+R_2(1+R_1Cs)}{1+R_1Cs}}=\frac{R_2\,(1+R_1Cs)}{R_1+R_2+R_1R_2Cs}$$

βγάζουμε στον παρονομαστή κοινό παράγοντα το (R_1+R_2) και έχουμε :

$$G(s)=\frac{R_2\,(1+R_1Cs)}{(R_1+R_2)\bullet[1+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cs]}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,\frac{1+R_1Cs}{1+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cs}$$

με $\quad \frac{R_2}{R_1+R_2}=\kappa<1$

Επειδή λοιπόν $R_1 > \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \longrightarrow R_1C > \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$

θέτω :

$$T_1=R_1C \quad \text{και} \quad T_2=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$$

οπότε $G(s)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,\frac{1+T_1s}{1+T_2s}$

Συμπεραίνουμε ότι $\quad \frac{1}{T_1}=\frac{1}{R_1C}<\frac{1}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C}=\frac{1}{T_2}$

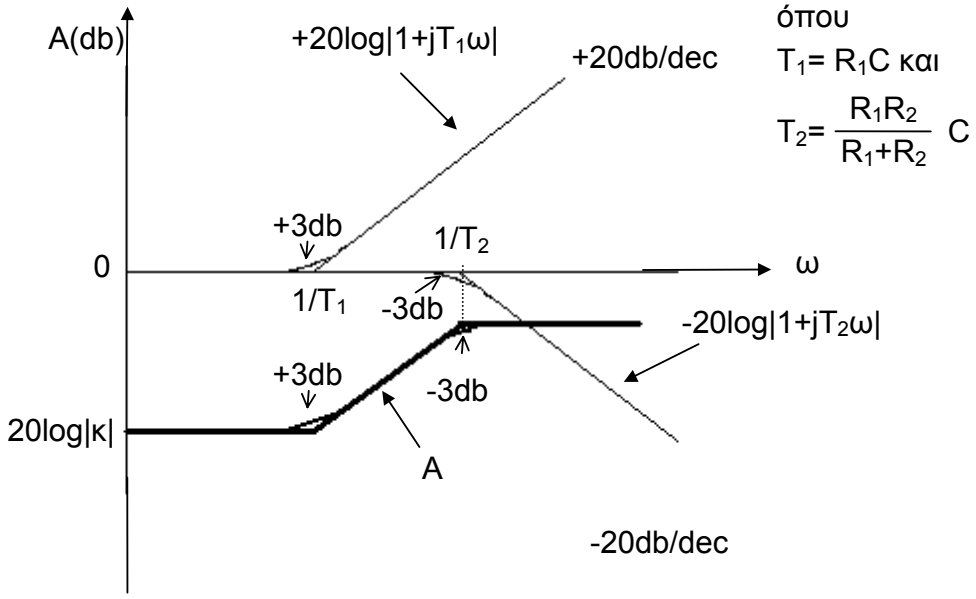
Αντικαθιστώντας τα κ, T_1, T_2 στην G(s) θα έχω :

$$G(s)=\kappa\,\frac{1+T_1s}{1+T_2s}=\kappa\,\frac{1+jT_1\omega}{1+jT_2\omega} \qquad (1)$$

Χάραξη καμπύλης πλάτους A(db)

$A(db) = 20\log|G(j\omega)| = 20\log|\kappa| + 20\log|1+jT_1\omega| - 20\log|1+jT_2\omega|$

Χαράσουμε στο ημιλογαριθμικό χαρτί την ευθεία $20\log|k|$ και τις τεθλασμένες των άλλων δύο όρων και μετά τις προσθέτουμε για να βρούμε την καμπύλη του πλάτους Α ,οπότε η καμπύλη έχει ως εξής :



Χάραξη διαφοράς φάσης

Από την σχέση (1)

$G(j\omega) = \kappa \dfrac{1+jT_1\omega}{1+jT_2\omega}$ θα έχουμε :

$\angle G(j\omega) = \angle\kappa+j0 + \angle 1+jT_1\omega - \angle 1+jT_2\omega$ (2)

δηλαδή ολική φάση

$$\varphi^\circ = \angle G(j\omega) = \varphi_1^\circ+\varphi_2^\circ-\varphi_3^\circ$$

όπου $\varphi_1^\circ=\varepsilon\varphi\varphi^{-1}\dfrac{0}{\kappa} = 0$, $\varphi_2^\circ=\varepsilon\varphi\varphi^{-1}\, T_1\omega$, $\varphi_3^\circ= \varepsilon\varphi\varphi^{-1}\, T_2\omega$

$\varepsilon\varphi\varphi_2=\omega T_1$

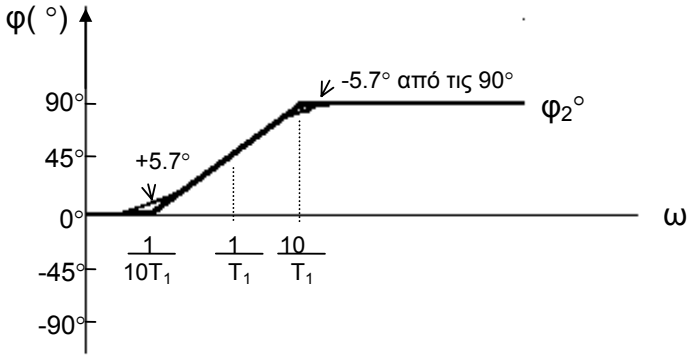
για ω=0 είναι $\varepsilon\varphi\varphi_2=0$ άρα $\varphi_2=0^\circ$

για $\omega=\dfrac{1}{10T_1}$ είναι $\varepsilon\varphi\varphi_2=\dfrac{1}{10T_1}T_1=\dfrac{1}{10}$ άρα $\varphi_2=5.7^\circ$

για $\omega=\dfrac{1}{T_1}$ είναι $\varepsilon\varphi\varphi_2=\dfrac{1}{T_1}T_1=1$ άρα $\varphi_2=45^\circ$

για $\omega=\dfrac{10}{T_1}$ είναι $\varepsilon\varphi\varphi_2=\dfrac{10}{T_1}T_1=10$ άρα $\varphi_2=84.3^\circ$ $(90^\circ-84.3^\circ=5.7^\circ)$

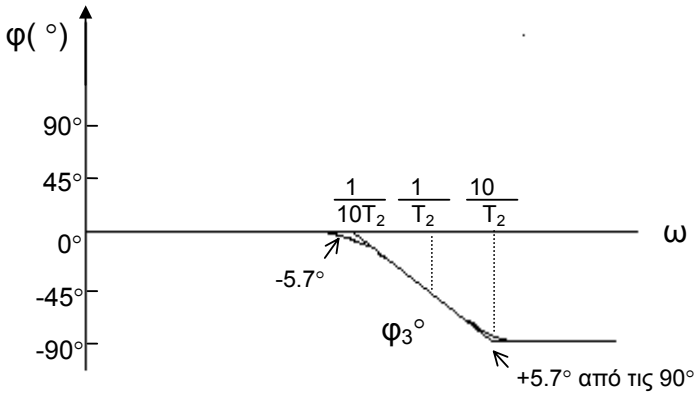
για $\omega>>\dfrac{10}{T_1} < \dfrac{1}{T_2}$ τότε είναι $\varphi_2 \longrightarrow 90^\circ$



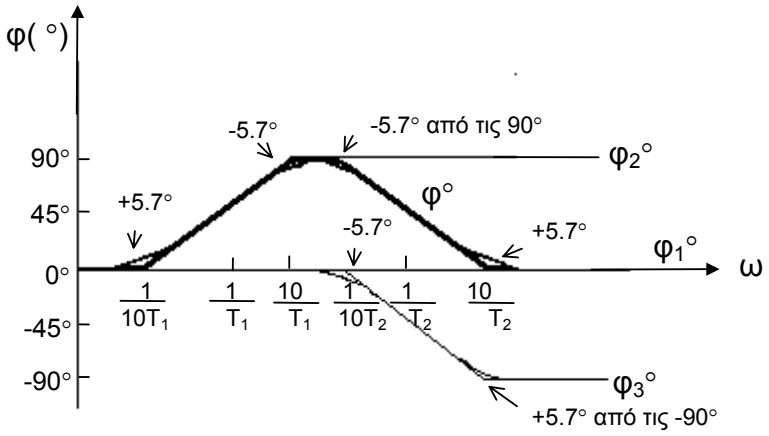
εφφ$_3$=ωT$_2$

για ω<< $\frac{1}{T_2}$ ή ω= $\frac{1}{10T_2}$ τότε είναι εφφ$_3$= $\frac{1}{10T_2}$T$_2$ = $\frac{1}{10}$ άρα φ$_3$=5.7°

και επειδή ο όρος 1+jωT$_2$ βρίσκεται στον παρονομαστή είναι - φ$_3$=-5.7°



προσθέτουμε τις πιο πάνω καμπύλες των φ$_2$ και φ$_3$
οπότε προκύπτει η πιο κάτω ολική καμπύλη διαφοράς φάσης, φ°



όπου η φωνία φ περιορίζεται περίπου στο διάστημα (1/10T$_1$, 10/T$_2$)
και 0° ≤ φ° ≤ +90° με 1/10T$_2$ > 10/T$_1$
Αν ήταν 1/10T$_2$ < 10/T$_1$ τότε φ° <90°

Σημείωση : Αναλυτικότερα για την έκφραση της φ, έχουμε :

Από την (1) έχουμε :

$$G(j\omega) = \kappa \frac{1+jT_1\omega}{1+jT_2\omega} = \kappa \frac{(1+jT_1\omega)(1-jT_2\omega)}{1+T_2^2\omega^2} =$$

$$= \kappa \frac{1+jT_1\omega-jT_2\omega- j^2T_1T_2\omega^2}{1+T_2^2\omega^2} = \kappa \frac{(1+T_1T_2\omega^2)+j(T_1-T_2)\omega}{1+T_2^2\omega^2}$$

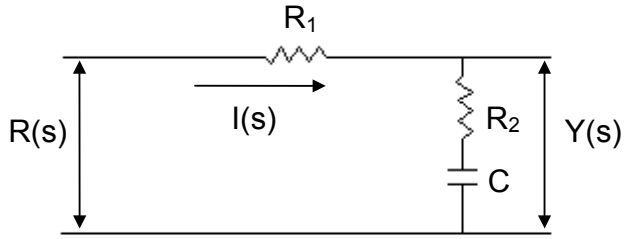
$$= \frac{\kappa}{1+T_2^2\omega^2}(1+T_1T_2\omega^2)+j \frac{\kappa}{1+T_2^2\omega^2}(T_1-T_2)\omega$$

οπότε

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{(T_1-T_2)\omega}{1+T_2^2\omega^2} \qquad (3)$$

Κύκλωμα καθυστέρησης

Το πιο συνηθισμένο απλό κύκλωμα καθυστέρησης είναι αυτό του πιο κάτω σχήματος. Λέγεται καθυστέρησης γιατί όταν διεγείρεται με ημιτονική τάση, η τάση εξόδου έπεται της τάσης εισόδου οπότε το κύκλωμα εισάγει «αρνητική» φάση.



Συνάρτηση μεταφοράς :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{I(s)(R_2+1/Cs)}{I(s)(R_1+R_2+1/Cs)}$$

$$G(s) = \frac{\frac{R_2Cs+1}{Cs}}{\frac{(R_1+R_2)Cs+1}{Cs}} =$$

$$G(s) = \frac{1+R_2Cs}{1+(R_1+R_2)Cs}$$

θέτω : $R_2C=T_2$ και $(R_1+R_2)C=T_1$ οπότε
αντικαθιστώντας τα T_1, T_2 στην G(s) θα έχω :

$$G(s) = \frac{1+T_2s}{1+T_1s} = \frac{1+jT_2\omega}{1+jT_1\omega} \qquad (1)$$

επειδή $(R_1+R_2)C > R_2C$

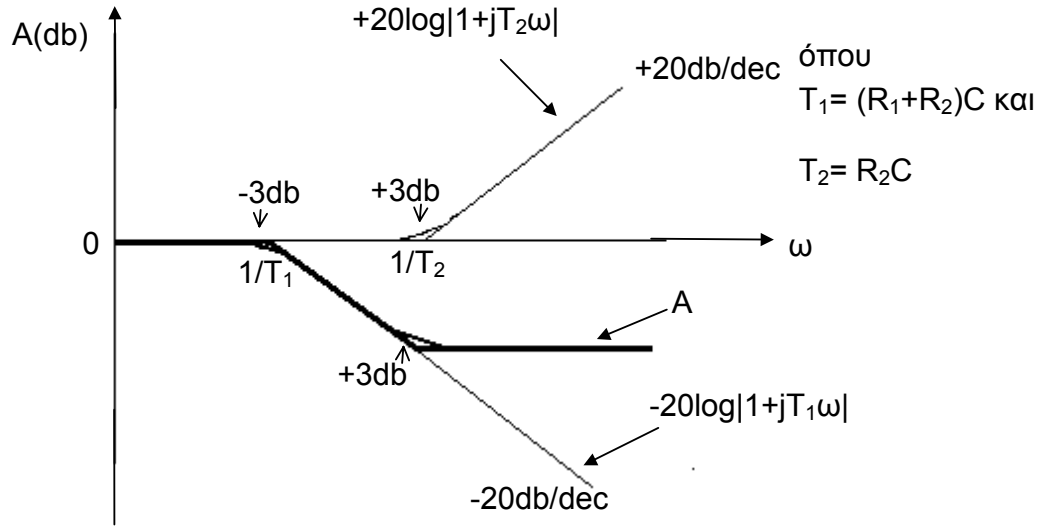
επομένως $T_1 > T_2$

άρα $\frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2}$

Χάραξη καμπύλης πλάτους A(db)

$A(db) = 20\log|G(j\omega)| = 20\log|1+jT_2\omega| - 20\log|1+jT_1\omega|$

Χαράσουμε στο ημιλογαριθμικό χαρτί τις τεθλασμένες των δύο όρων και μετά τις προσθέτουμε για να βρούμε την καμπύλη του πλάτους A ,οπότε η καμπύλη έχει ως εξής :



Χάραξη διαφοράς φάσης

Από την σχέση (1)

$G(j\omega) = \frac{1+jT_2\omega}{1+jT_1\omega}$ θα έχουμε :

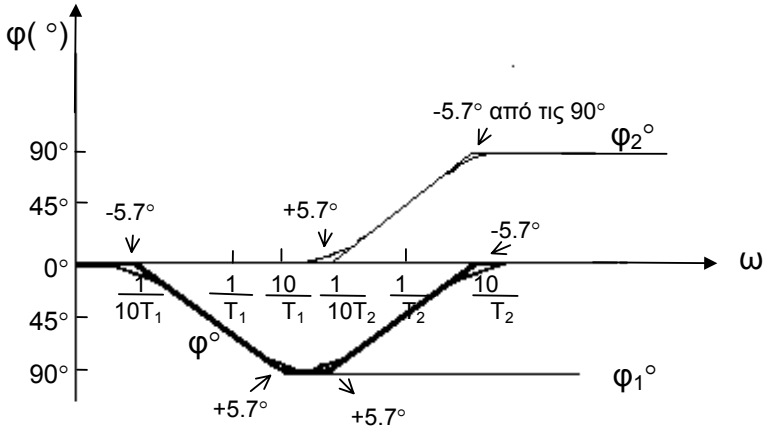
$\angle G(j\omega) = \angle 1+jT_2\omega - \angle 1+jT_1\omega$ (2)

δηλαδή ολική φάση

$$\varphi^\circ = \angle G(j\omega) = \varphi_2^\circ - \varphi_1^\circ$$

όπου, $\varphi_2^\circ = \varepsilon\varphi\varphi^{-1} T_2\omega$, $\varphi_1^\circ = \varepsilon\varphi\varphi^{-1} T_1\omega$

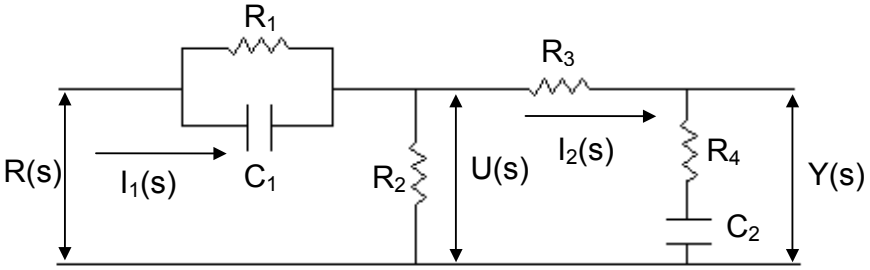
οπότε προσθέτοντας τις καμπύλες φ_2° και $-\varphi_1^\circ$ όπως είδαμε και στο κύκλωμα προπορείας πιο πάνω προκύπτει η πιο κάτω ολική καμπύλη διαφοράς φάσης φ°



όπου η φωνία φ περιορίζεται περίπου στο διάστημα $(1/10T_1 , 10/T_2)$
και $-90° \le \varphi° \le 0°$ με $1/10T_2 > 10/T_1$
Αν ήταν $1/10T_2 < 10/T_1$ τότε $\varphi° > -90°$

<u>Σύνθετο κύκλωμα</u>

Ένα από τα συνηθισμένα σύνθετα κυκλώματα είναι αυτό του πιο κάτω σχήματος. Στην ουσία το κύκλωμα αυτό όπως φαίνεται και από την ονομασία του αποτελείται από τα δύο προηγούμενα κυκλώματα προπορείας και καθυστέρησης. Η φάση θα είναι το άθροισμα των επιμέρους φάσεων των κυκλωμάτων προπορείας και καθυστέρησης…



Συνάρτηση μεταφοράς :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{Y(s)}{U(s)}\frac{U(s)}{R(s)}=G_2(s)\bullet G_1(s)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα οι συναρτήσεις $G_1(s)$ και $G_2(s)$ είναι οι συναρτήσεις μεταφοράς των κυκλωμάτων προπορείας και καθυστέρησης που εργαστήκαμε πιο πάνω. Οπότε η πιο πάνω σχέση γίνεται :
$G(s)= G_1(s)\bullet G_2(s)$
θέτω :

$$\frac{R_2}{R_1+R_2}=\kappa$$

$T_1= R_1C_1$, $T_2=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_1$ και

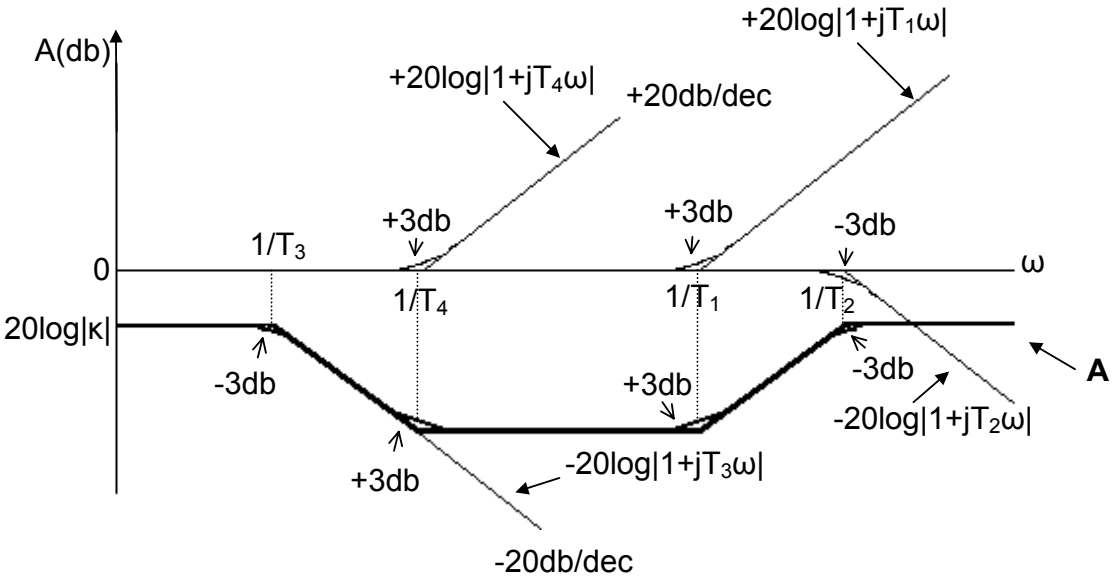
$T_3=(R_3+R_4)C_2$, $T_4= R_4C_2$ οπότε

$$G(s) =\kappa \frac{1+T_1s}{1+T_2s} \bullet \frac{1+T_4s}{1+T_3s}$$

<u>Χάραξη καμπύλης πλάτους A(db)</u>

$$A(db) = 20\log|G_1(j\omega)|+ 20\log|G_2(j\omega)|$$
$$= 20\log|\kappa| + 20\log|1+jT_1\omega| - 20\log|1+jT_2\omega| + 20\log|1+jT_4\omega| - 20\log|1+jT_3\omega|$$

Χαράσσουμε στο ημιλογαριθμικό χαρτί την ευθεία $20\log|k|$ και τις τεθλασμένες των άλλων όρων και μετά τις προσθέτουμε για να βρούμε την καμπύλη του πλάτους A ,οπότε η καμπύλη έχει ως εξής :



Όπου τα T_1,T_2,T_3,T_4 φαίνονται πιο πάνω

<u>Χάραξη διαφοράς φάσης</u>

Από τη σχέση :

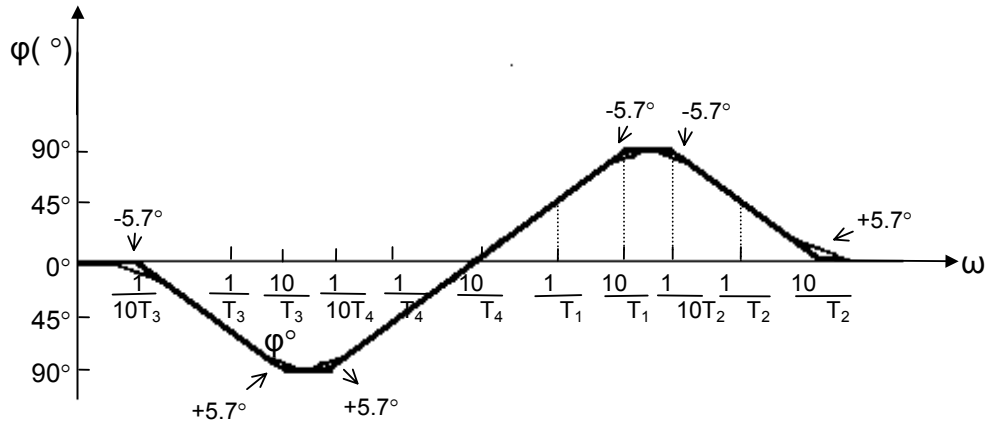
$$G(s) =\kappa \frac{1+T_1s}{1+T_2s} \bullet \frac{1+T_4s}{1+T_3s}$$ θα έχουμε :

$$\angle G(j\omega) = \angle\kappa+j0 + \angle 1+jT_1\omega - \angle 1+jT_2\omega +\angle 1+jT_4\omega - \angle 1+jT_3\omega$$

δηλαδή ολική φάση

$$\varphi^\circ = \angle G(j\omega) = \varphi_0^\circ+\varphi_1^\circ-\varphi_2^\circ+ \varphi_4^\circ-\varphi_3^\circ$$

οπότε προσθέτοντας τις καμπύλες $\varphi_0°$, $\varphi_1°$, $-\varphi_2°$, $\varphi_4°$ και $-\varphi_3°$ όπως είδαμε στα επιμέρους κυκλώματα προπορείας και καθυστέρησης, προκύπτει η πιο κάτω ολική καμπύλη διαφοράς φάσης φ ° :



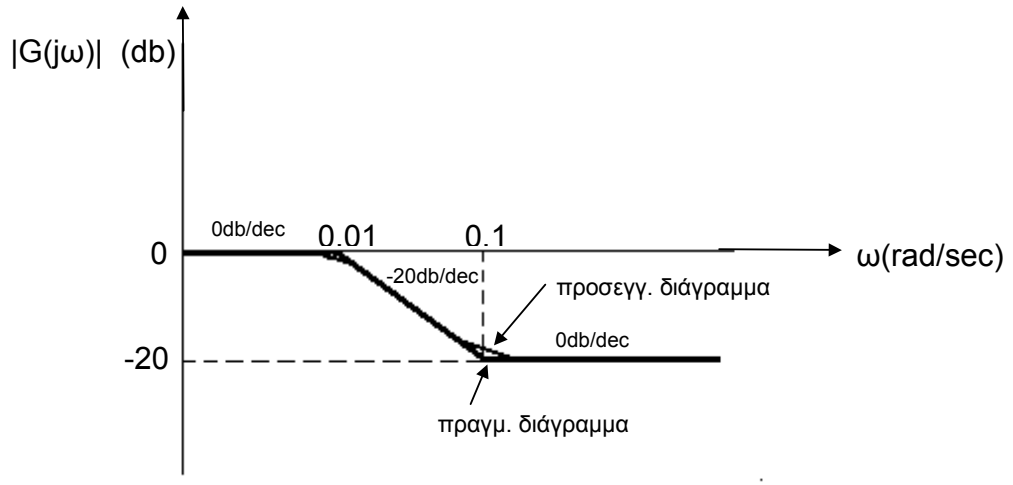
Όπως βλέπουμε στο σχήμα η φάση φ° φτάνει στις 90° και στην αρνητική και στη θετική της πλευρά. Αυτό γίνεται γιατί $1/10T_4>10/T_3$ και $1/10T_2<10T_1$.

Διαφορετικά θα είχαμε $-90°<\varphi°<90°$

Ακόμη εδώ θεωρούμε ότι $10/T_4 \approx 1/10T_1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ BODE

Δίνεται το διάγραμμα πλάτους συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας ενός συστήματος. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.



α. Για ω<0.01 έχουμε ευθεία γραμμή με κλίση 0 db/deg που αρχίζει από τα 0db (όρος 20logκ =20log10^0 =20log1 =0)

β. Για 0.01<ω<0.1 έχουμε ευθεία γραμμή με κλίση -20 db/deg [όρος της μορφής $(1+j\frac{\omega}{0.01})^{-1} = (1+j100\omega)^{-1}$].

γ. Για ω>0.1 θα έχουμε όρο της μορφής:
$(1+j\frac{\omega}{0.1})^{+1} = (1+j10\omega)^{+1}$ άρα $||G(j\omega)=\frac{1\ (1+j10\omega)}{(1+j100\omega)}||$.

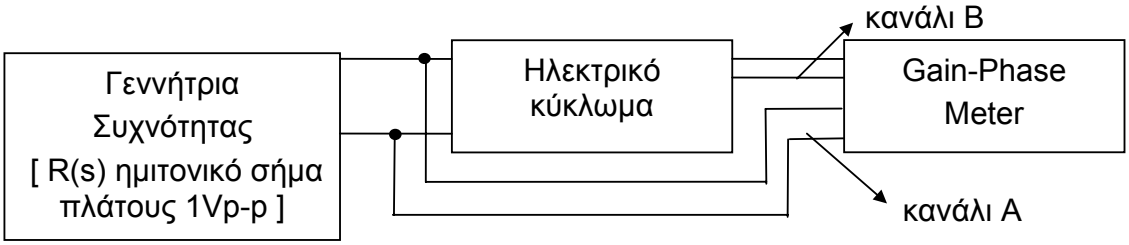
Αναλυτικότερα, έχουμε ευθεία γραμμή με κλίση 0 db/deg ως το τελικό αποτέλεσμα με την «άθροιση» της καμπύλης του προαναφερόμενου όρου στο (β) με τον τρέχοντα (γ)!

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Αναθεωρημένη Έκδοση Οδηγιών - Revision 2
Επιμέλεια: Παπαδόπουλος Ε.Γ. Παρασκευάς
Εργαστηριακός Συνεργάτης ΤΕΙ Πειραιά
Δικτυακός Τόπος: www.angelfire.com/electronic2/ppapad
Email: ppapad@freemail.gr

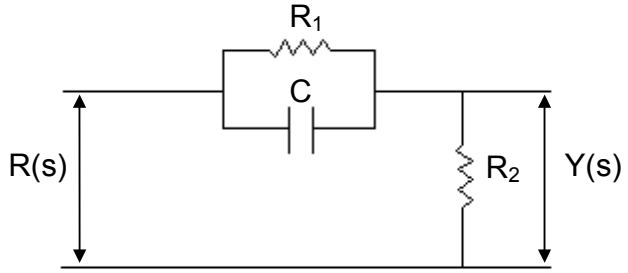
ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΕΡΔΟΥΣ ΚΑΙ ΦΑΣΗΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΙΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΠΡΟΠΟΡΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ

Πραγματοποιήστε τη συνδεσμολογία του παρακάτω σχήματος :



όπου στη θέση του ηλεκτρικού κυκλώματος βάλτε διαδοχικά τα πιό κάτω δικτυώματα :

Α. Κύκλωμα προπορείας :



1) Λάβετε τις πειραματικές σας <u>μετρήσεις</u> (κέρδος και φάση) <u>στις συχνότητες f</u> του ημιτονικού σήματος εισόδου πλάτους 1Vp-p, βάσει του παρακάτω πίνακα (στο μέτρο της όποιας δυνατής ακρίβειας) – Υπολογιστικά το ω=2πf - <u>Σημαντική Παρατήρηση: Κατά την λήψη των μετρήσεων κέρδους-διαφοράς φάσης, να φροντίζετε ανά μέτρηση, να επιλέγετε την καλύτερη δυνατή ευαισθησία (κλίμακα) για την περιοχή συχνοτήτων του αναλογικού και ψηφιακού οργάνου μέτρησης!</u>

fin (Hz)	*ω (rad/sec)*	*A (db)*	*φ (μοίρες)*
2,00	***12,56***		
5,00	***31,40***		
10,00	***62,80***		
15,00	***94,20***		
40,00	***251,20***		
50,00	***314,00***		
70,00	***439,60***		
80,00	***502,40***		
100,00	***628,00***		

fin (Hz)	ω (rad/sec)	A (db)	φ (μοίρες)
120,00	753,60		
130,00	816,40		
160,00	1004,80		
320,00	2009,60		
480,00	3014,40		
485,00	3045,80		
1600,00	10048,00		
3200,00	20096,00		
4800,00	30144,00		
4900,00	30772,00		
6400,00	40192,00		
8000,00	50240,00		
13000,00	81640,00		
15000,00	94200,00		
16000,00	100480,00		
48000,00	301440,00		
49000,00	307720,00		

2) Σύμφωνα με τις μετρήσεις σας, σχεδιάστε τις καμπύλες κέρδους [A=f(ω)] και φάσης [φ=f(ω)] σε ημιλογαριθμικό χαρτί.

3) Με βάση το σχετικό θεωρητικό μέρος της άσκησης, υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς G(s) του ανωτέρω κυκλώματος, δώστε τη σχέση της σε μορφή γινομένου όρων και τις σχέσεις που αφορούν τα κ, T_1, T_2, ω_1 και ω_2.

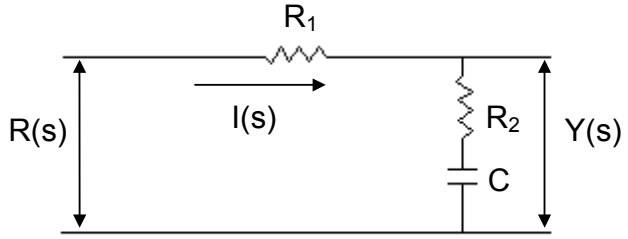
4) Αντικαθιστώντας στις σχέσεις του (3) όπου R_1=33,3KΩ, R_2=3,7KΩ και C=0.01μF, σε συνδυασμό με τη μαθηματική προσέγγιση που έχει αναπτυχθεί στο σχετικό θεωρητικό μέρος της άσκησης, σχεδιάστε τις καμπύλες κέρδους [A=f(ω)] και φάσης [φ=f(ω)] σε ημιλογαριθμικό χαρτί, τόσο ανά όρο της G(s), όσο και για την G(s) συνολικά με διαφορετική σήμανση.

5) Κάντε σύγκριση των γραφημάτων Bode για την G(s) που προέκυψαν κατά την πειραματική διαδικασία (βήμα 2) και τη θεωρητική (βήμα 4). Θα πρέπει προσεγγιστικά να ταυτίζονται!

6) Βάσει του διαγράμματος Bode, ως φίλτρο, πως θα το χαρακτηρίζατε;

7) Διατύπωση τυχόν απορριών – προβληματισμών.

Β. Κύκλωμα καθυστέρησης :



1) Λάβετε τις πειραματικές σας <u>μετρήσεις</u> (κέρδος και φάση) <u>στις συχνότητες f</u> του ημιτονικού σήματος εισόδου πλάτους 1Vp-p, βάσει του παρακάτω πίνακα (στο μέτρο της όποιας δυνατής ακρίβειας) – Υπολογιστικά το ω=2πf - <u>Σημαντική Παρατήρηση: Κατά την λήψη των μετρήσεων κέρδους-διαφοράς φάσης, να φροντίζετε ανά μέτρηση, να επιλέγετε την καλύτερη δυνατή ευαισθησία (κλίμακα) για την περιοχή συχνοτήτων του αναλογικού και ψηφιακού οργάνου μέτρησης!</u>

fin (Hz)	*ω (rad/sec)*	*A (db)*	*φ (μοίρες)*
0,80	***5,02***		
1,00	***6,28***		
1,10	***6,91***		
1,30	***8,16***		
1,40	***8,79***		
1,60	***10,05***		
3,20	***20,10***		
6,50	***40,82***		
11,20	***70,34***		
16,00	***100,48***		
32,00	***200,96***		
48,00	***301,44***		
50,00	***314,00***		
56,00	***351,68***		
80,00	***502,40***		
160,00	***1004,80***		
320,00	***2009,60***		
480,00	***3014,40***		
640,00	***4019,20***		
800,00	***5024,00***		
960,00	***6028,80***		
1100,00	***6908,00***		
1300,00	***8164,00***		
1500,00	***9420,00***		
1600,00	***10048,00***		
3200,00	***20096,00***		
4800,00	***30144,00***		
6400,00	***40192,00***		

2) Σύμφωνα με τις μετρήσεις σας, σχεδιάστε τις καμπύλες κέρδους [A=f(ω)] και φάσης [φ=f(ω)] σε ημιλογαριθμικό χαρτί.

3) Με βάση το σχετικό θεωρητικό μέρος της άσκησης, υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς G(s) του ανωτέρω κυκλώματος, δώστε τη σχέση της σε μορφή γινομένου όρων και τις σχέσεις που αφορούν τα T_1, T_2, ω_1 και ω_2.

4) Αντικαθιστώντας στις σχέσεις του (3) όπου R_1=90KΩ, R_2=10KΩ και C=0.1μF, σε συνδυασμό με τη μαθηματική προσέγγιση που έχει αναπτυχθεί στο σχετικό θεωρητικό μέρος της ά-

σκησης, σχεδιάστε τις καμπύλες κέρδους [A=f(ω)] και φάσης [φ=f(ω)] σε ημιλογαριθμικό χαρτί, τόσο ανά όρο της G(s), όσο και για την G(s) συνολικά με διαφορετική σήμανση.

5) Κάντε σύγκριση των γραφημάτων Bode για την G(s) που προέκυψαν κατά την πειραματική διαδικασία (βήμα 2) και τη θεωρητική (βήμα 4). Θα πρέπει προσεγγιστικά να ταυτίζονται!

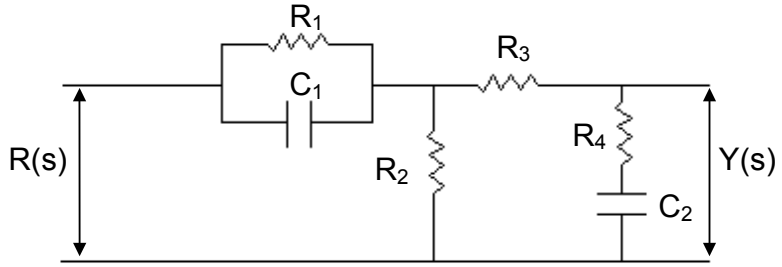
6) Βάσει του διαγράμματος Bode, ως φίλτρο, πως θα το χαρακτηρίζατε;

7) Διατύπωση τυχόν απορριών – προβληματισμών.

---------- ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΟΥ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ----------

Σημειώσεις:

1. **Στόχος Εργαστηριακής Άσκησης: Θα πρέπει βάσει των προαναφερομένων, να μπορείτε να χαράζετε το διάγραμμα Bode της οποιασδήποτε δοθείσας G(s) και το αντίστροφο. ΠΡΕΠΕΙ να μπορείτε να «διαχειρίζεστε» με άνεση ΗΜΙΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ ΧΑΡΤΙ.**
2. Ακαδημαϊκά, θα μπορούσατε αντιστοίχως να πράξετε πειραματικά και θεωρητικά το ακόλουθο σύνθετο κύκλωμα προπορείας-καθυστέρησης, να λάβετε αντίστοιχα πειραματικές μετρήσεις και να προβείτε στη σύγκριση των σχετικών διαγραμμάτων Bode που προκύπτουν πειραματικά και θεωρητικά για δοσμένες τιμές R_1, C_1, R_2 και R_3, R_4, C_2 :



3. **Ανά τακτά χρονικά διαστήματα να ενημερώνεστε από το electra για νεώτερες ανακοινώσεις επί της εργαστηριακής άσκησης.**
4. **Ερχόμενοι στο Εργαστήριο, θα πρέπει (όπως και για κάθε εργαστηριακή άσκηση) ήδη να έχετε μελετήσει διεξοδικά, το Θεωρητικό Μέρος της Άσκησης και να έχετε μαζί σας το αντίστοιχο εργαστηριακό φυλλάδιο!**
5. **Η εργασία της άσκησης, θα παραδίδεται (ΟΧΙ ΜΕΣΩ EMAIL) μηχανογραφημένη, εκτυπωμένη μία ανά 2 άτομα κάθε ομάδας, με τα όποια γραφήματα σε ημιλογαριθμικό χαρτί ή μέσω λογισμικού σε ημιλογαριθμική απόδοση του ω (rad/sec) άξονα (π.χ. μέσω προσομοίωσης στο MatLab). Θα ενημερωθείτε για το καταληκτικό χρονικό όριο παράδοσης της κάθε εργασίας (πέραν αυτού του ορίου, ΔΕΝ θα γίνονται δεκτές οι όποιες εργασίες).**

Καλή συνέχεια!

Εκ του Εργαστηρίου,

© Παπαδόπουλος Ε.Γ. Παρασκευάς
Εργαστηριακός Συνεργάτης ΤΕΙ Πειραιά
Δικτυακός Τόπος: www.angelfire.com/electronic2/ppapad
Email: ppapad@freemail.gr